

## Die quadratische Funktion

Eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  heißt quadratische Funktion.

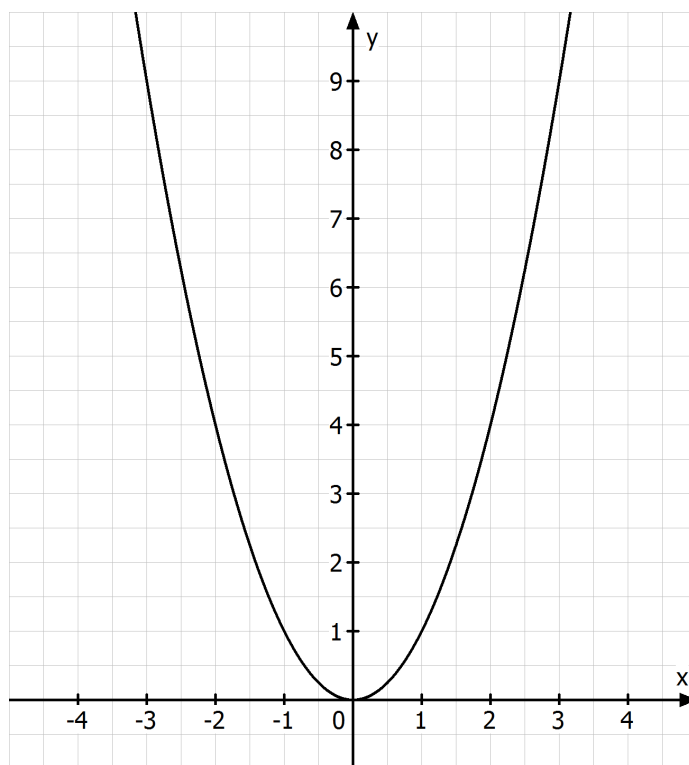
Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel.

(1) Die Funktion mit der Gleichung  $y = x^2$

Wertetabelle:

|   |    |    |    |   |   |   |   |
|---|----|----|----|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 9  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |

Graph:



Den Graph der Funktion  $y = x^2$  nennt man auch Normalparabel.

### Eigenschaften der Funktion $y = x^2$ :

- a) Definitionsmenge:  $D = \mathbb{R}$  Wertemenge:  $W = \mathbb{R}_0^+$
- b) Die y-Achse ist Symmetrieachse (Gleichung der Symmetrieachse:  $x = 0$ ).
- c) Der Scheitel ist der tiefste Kurvenpunkt (Koordinaten des Scheitels  $(0|0)$ ).

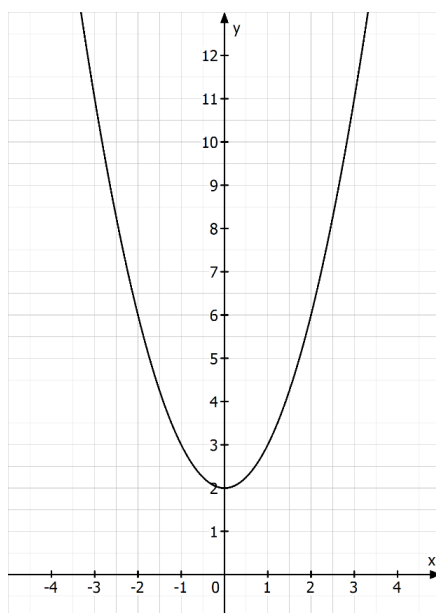
### (2) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + t$ ( $t \in \mathbb{R}$ )

Beispiel:  $y = x^2 + 2$

### Wertetabelle:

|   |    |    |    |   |   |   |    |
|---|----|----|----|---|---|---|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  |
| y | 11 | 6  | 3  | 2 | 3 | 6 | 11 |

### Graph:



Der Graph von  $y = x^2 + t$  entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um  $t$  in y-Richtung ( $t > 0$ : nach oben;  $t < 0$ : nach unten).

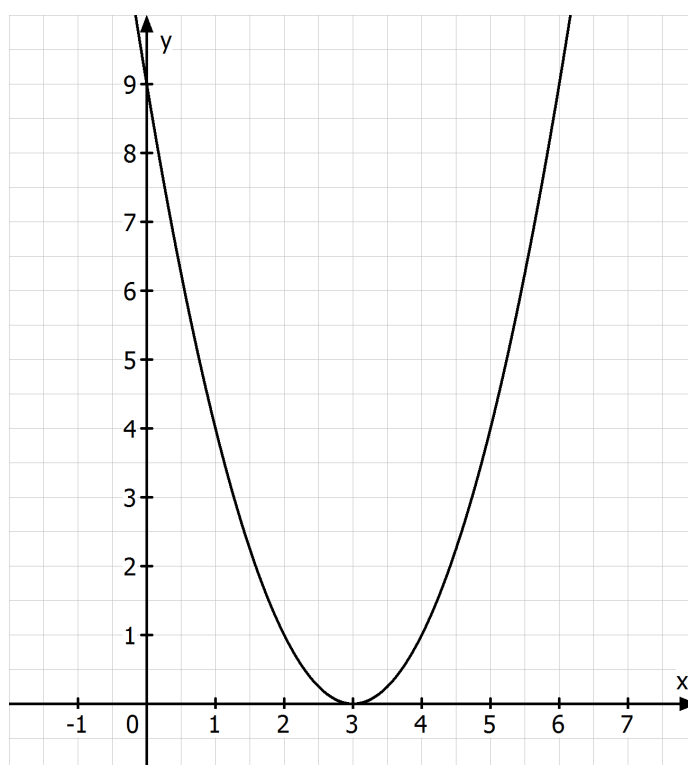
### (3) Die Funktion mit der Gleichung $y = (x - s)^2$

Beispiel:  $y = (x - 3)^2$

Wertetabelle:

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Graph:



Der Graph von  $y = (x - s)^2$  entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um  $s$  in  $x$ -Richtung ( $s > 0$ : nach rechts;  $s < 0$ : nach links).

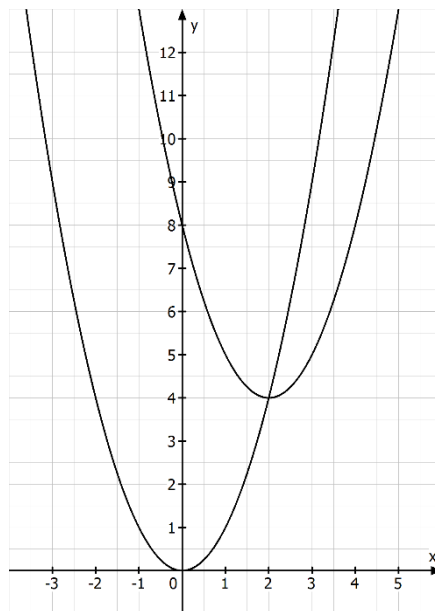
(4) Die Funktion mit der Gleichung  $y = x^2 + px + q$

Beispiel:  $y = x^2 - 4x + 8$

Wertetabelle:

|   |    |   |   |   |   |   |    |
|---|----|---|---|---|---|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| y | 13 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 13 |

Graph:



Der Graph von  $y = x^2 + px + q$  entsteht aus der Normalparabel durch eine Verschiebung in x- und y-Richtung.

Im Beispiel:

Normalparabel:

$$y = x^2$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung:

$$y = (x - 2)^2$$

Verschiebung um 4 in y-Richtung:

$$y = (x - 2)^2 + 4$$

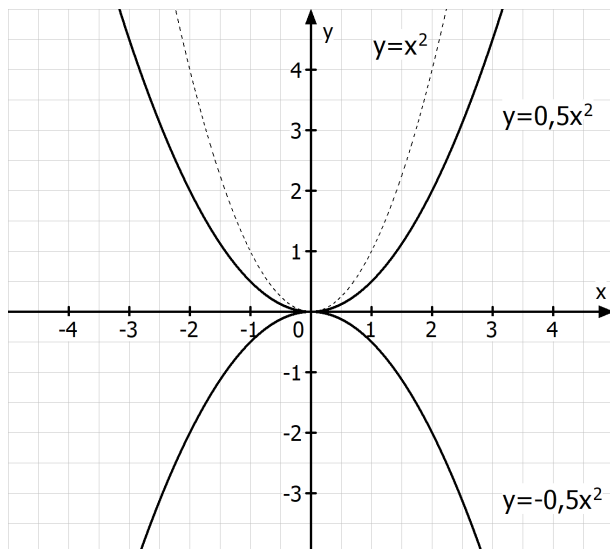
$$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

Die Gleichung  $y = (x - 2)^2 + 4$  enthält die Koordinaten des Scheitels S(2/4) und heißt daher Scheitelgleichung.

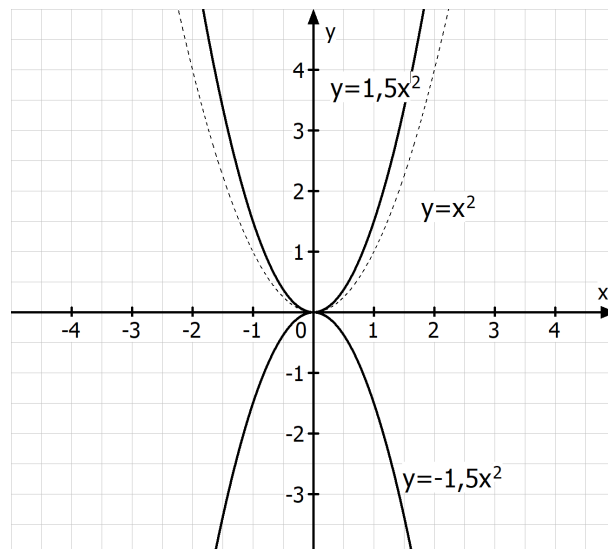
(5) Die Funktion mit der Gleichung  $y = ax^2$

Beispiele:

$y = \pm 0,5x^2$



$y = \pm 1,5x^2$



Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung  $y = ax^2$  sind Parabeln mit dem Scheitel  $S(0/0)$ . Ihre Form wird durch die Variable  $a$  festgelegt.

$a > 1$ : Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestreckt

$0 < a < 1$ : Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestaucht

$-1 < a < 0$ : Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestaucht

$a < -1$ : Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt

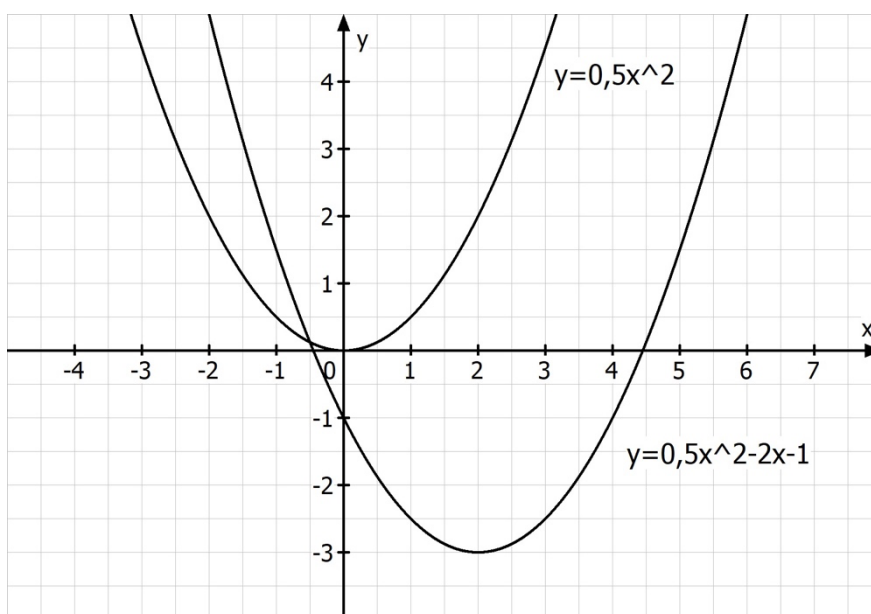
## (6) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$

Beispiel:  $y = 0,5x^2 - 2x - 1$

Wertetabelle:

| x | -1  | 0  | 1    | 2  | 3    | 4  | 5   |
|---|-----|----|------|----|------|----|-----|
| y | 1,5 | -1 | -2,5 | -3 | -2,5 | -1 | 1,5 |

Graph:



Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  sind Parabeln, die durch Parallelverschiebung aus den gestreckten oder gestauchten Normalparabeln mit der Gleichung  $y = ax^2$  hervorgehen.

In der obigen Abbildung ist die Parabel mit der Gleichung  $y = 0,5x^2 - 2x - 1$  durch eine Verschiebung der Parabel mit der Gleichung  $y = 0,5x^2$  um zwei nach rechts und drei nach unten entstanden.

Der Scheitelpunkt einer Parabel hat eine große Bedeutung für die Parabel. Die Koordinaten des Scheitelpunktes können wie folgt bestimmt werden:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$y_s$  wird am sinnvollsten ermittelt, indem man  $x_s$  in den Parabelterm einsetzt.

Damit lässt sich die allgemeine Form einer Parabel  $p$  ganz einfach in der Scheitelpunktform darstellen:

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Bestimmung der Koordinaten des Scheitels und der Scheitelform im konkreten Beispiel:

$$p(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$$

$$a = 0,5 \quad b = -2 \quad c = -1$$

$$x_s = -\frac{-2}{2 \cdot 0,5} = 2 \quad y_s = 0,5 \cdot (2)^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -3$$

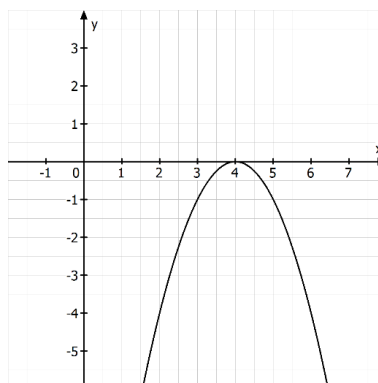
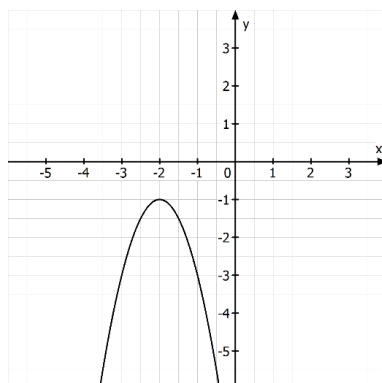
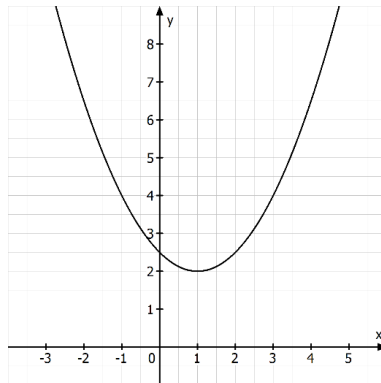
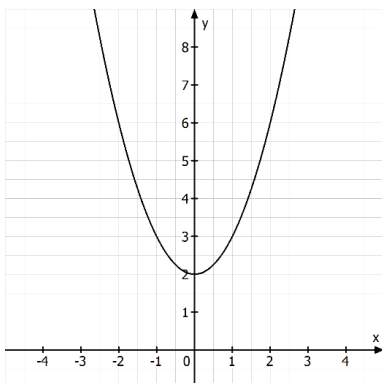
$$\Rightarrow S(2 | -3)$$

$$\text{Scheitelform: } p(x) = 0,5 \cdot (x - 2)^2 - 3$$

Für die folgenden Aufgaben kann als Hilfe bzw. Kontrolle gerne die  
Geogebra Datei „Eingabe allgemeine quadratische Funktion“  
(<https://www.geogebra.org/m/bxnk5pxe>) verwendet werden.



- 1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung  $y = 2x^2 + 8x + 8$  und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an. ○
  
- 2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung  $y = -x^2 - 4x - 5$  und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an. ○
  
- 3 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der Scheitelpunktform an. ⊗





4.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt. 

4.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt  $a \leq 1$ .

4.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

4.3 Aus  $c = 0$  folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

4.4 Aus  $a < -1$  folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

4.5 Für  $c > 0$  verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

5.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor  $a$  und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an. 

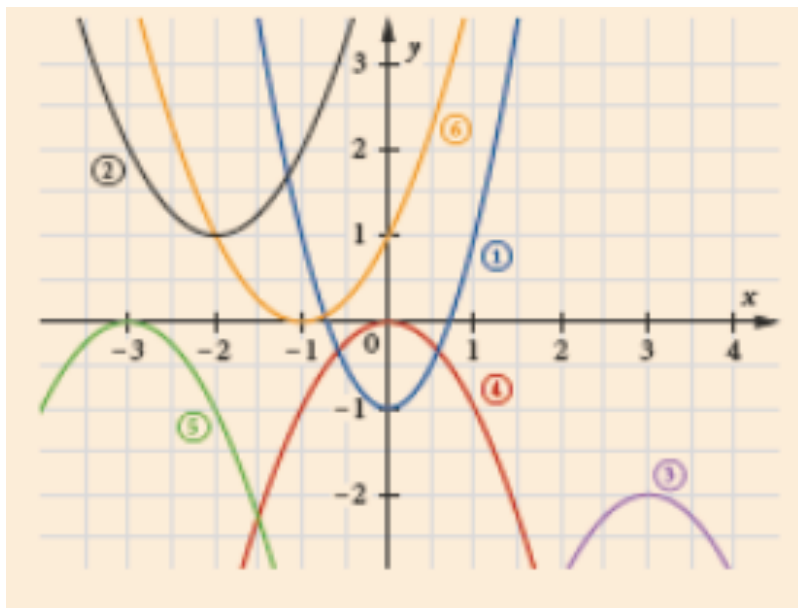
5.1  $a = 1$ ; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

5.2  $a = -2$ ; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

5.3  $a = -\frac{1}{6}$ ; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

6 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu. 

- a)  $f(x) = -x^2$       b)  $f(x) = 2x^2 - 1$       c)  $f(x) = -(x+3)^2$   
d)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$     e)  $f(x) = -(x-3)^2 - 2$     f)  $f(x) = x^2 + 4x + 5$



7 Lösen Sie mindestens fünf neue Aufgaben in der Geogebra Datei

„Übung zur allgemeinen quadratischen Funktion“. 

(<https://www.geogebra.org/classic/fkp6w6mq>)



## Lösungen zu den Aufgaben

- 1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung  $y = 2x^2 + 8x + 8$  und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$$

$$y_s = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 8 = 0$$

$$\text{Wertemenge: } W = [0; \infty[$$

$$\text{Scheitelpunktform: } y = 2(x+2)^2 + 0 \Rightarrow y = 2(x+2)^2$$

$$\text{Symmetrieachse: } x = -2$$

- 2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung  $y = -x^2 - 4x - 5$  und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2$$

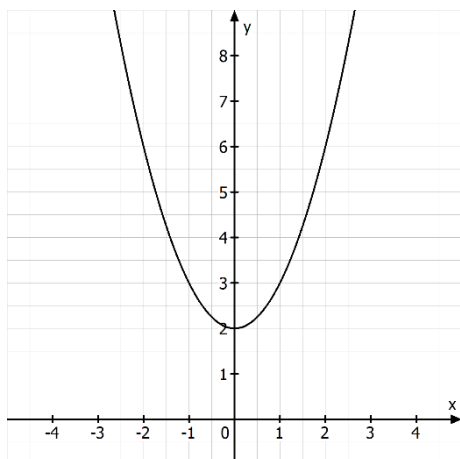
$$y_s = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = -1$$

$$\text{Wertemenge: } W = ]-\infty; -1]$$

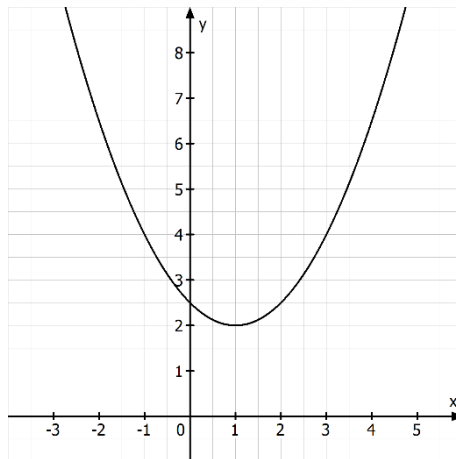
$$\text{Scheitelformelgleichung: } y = -(x+2)^2 - 1$$

$$\text{Symmetrieachse: } x = -2$$

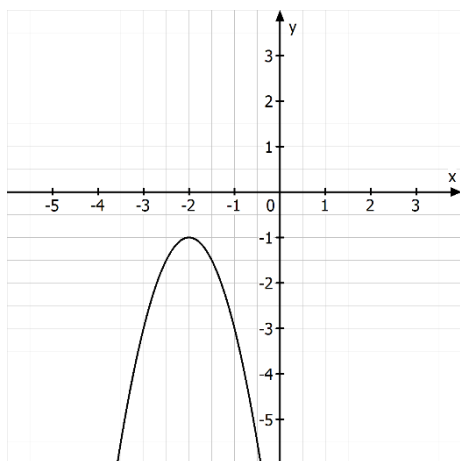
3 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der Scheitelpunktform an.



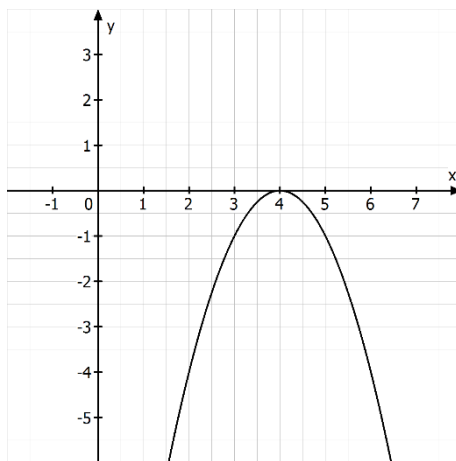
$$y = x^2 + 2$$



$$y = 0,5 \cdot (x - 1)^2 + 2$$



$$-2 \cdot (x + 2)^2 - 1$$



$$y = -(x - 4)^2$$

4.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt.

4.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt  $a \leq 1$ .

Falsch, für  $a = -2$  ist es eine gestreckte Parabel.

4.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

Falsch, wenn  $S(-1/-1)$  ist, dann ist die Parabel nach links verschoben.

4.3 Aus  $c = 0$  folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

Falsch, für  $c = 0$  verlaufen die Parabeln durch den Ursprung.

4.4 Aus  $a < -1$  folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

Richtig.

4.5 Für  $c > 0$  verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

Falsch, Parabel mit  $y = x^2 - 8x + 11$  verläuft auch unterhalb der x-Achse.

5.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor  $a$  und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an.

5.1  $a = 1$ ; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

$$y = (x - 4)^2 - 2$$

5.2  $a = -2$ ; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

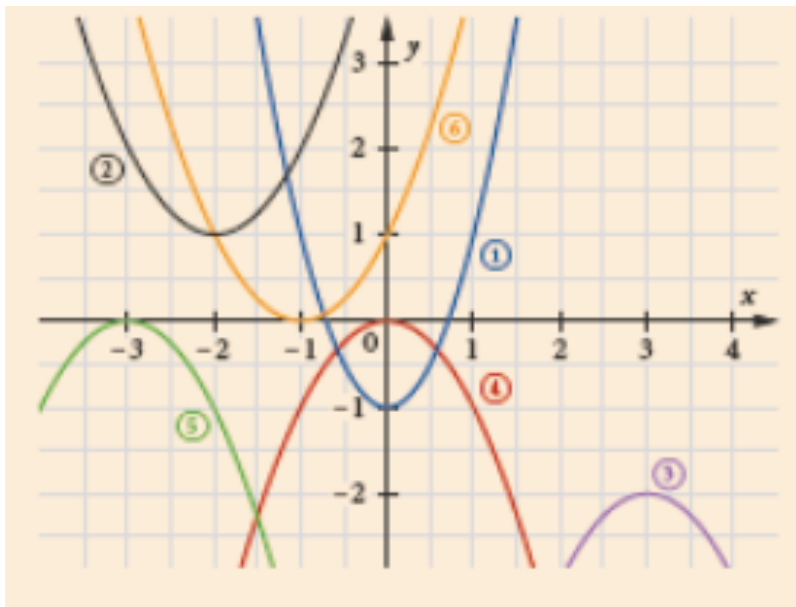
$$y = -2x^2 + 4,5$$

5.3  $a = -\frac{1}{6}$ ; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

$$y = -\frac{1}{6}(x + 3)^2$$

6 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu.

- a)  $f(x) = -x^2$       b)  $f(x) = 2x^2 - 1$       c)  $f(x) = -(x+3)^2$   
d)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$     e)  $f(x) = -(x-3)^2 - 2$     f)  $f(x) = x^2 + 4x + 5$



- 6a) 4      6b) 1      6c) 5      6d) 6      6e) 3      6f) 2

7 Lösen Sie mindestens fünf neue Aufgaben in der Geogebra Datei

„Übung zur allgemeinen quadratischen Funktion“.

(<https://www.geogebra.org/classic/fkp6w6mq>)

